

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ. (2 СЕМЕСТР)

1. **Приведение матрицы к ступенчатому и простейшему виду.** Сохранение ранга матрицы при элементарных преобразованиях. Матрица ступенчатого вида и ее ранг. Приведение матрицы к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса). Приведение ступенчатой матрицы к простейшему виду (обратный ход метода Гаусса).
2. **Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.** Матрица системы и ее расширенная матрица. Элементарные преобразования системы и ее расширенной матрицы по методу Гаусса. Критерий разрешимости системы (теорема Кронекера-Капелли) и единственности решения.
3. **Построение общего решения однородной системы.** Критерий существования ненулевых решений однородной системы линейных уравнений (выделить, в частности, случай квадратной системы). Линейное пространство решений однородной системы. Теорема о его размерности и базисе (фундаментальной системе решений). Структура общего решения неоднородной системы (теорема о связи решений однородной и неоднородной систем).
4. **Понятие комплексного числа.** Определение комплексных чисел и действий с ними. Алгебраическая запись комплексного числа, его изображение на плоскости. Сопряжение комплексного числа и его свойства.
5. **Комплексные числа в тригонометрической форме.** Модуль и аргумент, тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Возведение в степень (формула Муавра) и извлечение корня.
6. **Действия с многочленами.** Сложение и умножение многочленов. Теорема о делении многочленов с остатком. Теорема Безу. Кратность корня.
7. **Разложение многочленов на множители.** Основная теорема алгебры многочленов и следствие из нее. Разложение многочлена на линейные множители. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Теорема о рациональных корнях многочлена.
8. **Уравнение 3-й степени.** Решение уравнений 3-й степени. Формулы Кардано.
9. **Понятие линейного пространства.** Аксиомы линейного пространства и следствия из них. Примеры линейных пространств.
10. **Линейная зависимость и независимость системы векторов.** Свойства линейной зависимости и независимости. Геометрический смысл линейной зависимости двух и трех геометрических векторов.
11. **Базис и размерность линейного пространства.** Определения базиса и размерности. Однозначность разложения векторов по базису. Координаты векторов в базисе. Линейные действия над векторами в координатах. Примеры линейных пространств и базисов в них.
12. **Линейное подпространство и линейная оболочка.** Определение линейного подпространства и линейной оболочки. Теорема о том, что подпространство само является линейным пространством. Дополнение базиса подпространства до базиса всего пространства. Линейная оболочка как линейное подпространство. Базис линейной оболочки.
13. **Линейные операторы и их матрицы.** Понятие линейного оператора, его свойства и примеры. Матрица линейного оператора в данном базисе. Векторно-матричная запись действия линейного оператора.

14. **Образ и ядро линейного оператора.** Определения образа и ядра линейного оператора. Примеры. Теорема о линейных подпространствах образа и ядра. Определения ранга и дефекта линейного оператора. Теорема о связи рангов оператора и его матрицы. Теорема о ранге и дефекте линейного оператора.
15. **Действия с операторами и их матрицами. Обратный оператор.** Умножение линейного оператора на число, сложение и умножение операторов. Соответствующие действия с матрицами операторов. Инъективные, сюръективные и биективные операторы. Обратный оператор. Критерий обратимости оператора. Единственность и линейность обратного оператора. Матрица обратного оператора. Невырожденный оператор и его обратимость. Произведение обратимых операторов.
16. **Замена базиса. Матрицы линейного оператора в разных базисах.** Матрица перехода от одного базиса к другому. Невырожденность матрицы перехода. Теорема об обратном переходе. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Подобие матриц и его свойства. Инвариантность определителя матрицы линейного оператора при замене базиса.
17. **Собственные значения и собственные векторы.** Понятия собственного значения и собственного вектора линейного оператора. Спектр оператора. Характеристический многочлен и нахождение собственных значений и собственных векторов с помощью характеристического уравнения. Инвариантность собственных значений, следа и определителя матрицы линейного оператора. Собственное подпространство линейного оператора. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям. Геометрическая и алгебраическая кратность собственных значений. Оператор простого типа, диагонализуемость его матрицы. Достаточное условие оператора простого типа. Инвариантные подпространства. Теорема о двумерных инвариантных подпространствах, соответствующих комплексным корням характеристического многочлена.
18. **Билинейная форма и ее матрица.** Понятие билинейной формы. Симметричная билинейная форма и ее матрица. Матрица формы в данном базисе. Координатная и векторно-матричная запись формы. Преобразование матрицы формы при замене базиса. Ранг билинейной формы, определение невырожденной билинейной формы. Квадратичная форма, порожденная симметричной билинейной формой. Теорема о полярной билинейной форме. Свойства квадратичной формы. Координатная и векторно-матричная запись квадратичной формы.
19. **Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду.** Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Приведение формы к каноническому виду методом Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм. Положительный и отрицательный индексы формы, ранг формы.
20. **Знакоопределенная квадратичная форма.** Индексы и ранг знакоопределенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.
21. **Евклидово пространство. Матрица Грама.** Определение евклидова пространства. Примеры. Свойства скалярного произведения. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Длина вектора и угол между векторами. Матрица Грама скалярного произведения, его координатная и векторно-матричная запись. Критерий матрицы Грама. Преобразование матрицы Грама при замене базиса.
22. **Ортонормированный базис.** Линейная независимость ортогональной системы векторов. Ортогональный и ортонормированный базисы. Запись матрицы Грама, скалярного

произведения и длины вектора в ортогональном и ортонормированном базисе. Метод ортогонализации базиса. Ортогональное дополнение.

- 23. Сопряженный оператор.** Понятие сопряженного оператора в евклидовом пространстве. Существование и единственность сопряженного оператора, его матрица в ортонормированном базисе. Свойства сопряжения операторов.
- 24. Самосопряженный оператор.** Определение самосопряженного оператора, симметричность его матрицы в ортонормированном базисе. Вещественность корней характеристического многочлена самосопряженного оператора. Свойства самосопряженных операторов. Ортогональность собственных векторов самосопряженных операторов. Инвариантные подпространства самосопряженного оператора. Построение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.
- 25. Ортогональный оператор.** Понятие ортогонального оператора, критерии ортогональности оператора ( перевод ортонормированного базиса в ортонормированный базис, совпадение обратного оператора с сопряженным ). Ортогональные матрицы. Корни характеристического многочлена ортогонального оператора. Канонический вид матрицы ортогонального оператора.
- 26. Квадратичные формы в евклидовом пространстве.** Присоединенный оператор, его самосопряженность. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Эквивалентность формул преобразования матрицы квадратичной формы и матрицы самосопряженного оператора при переходе от одного ортонормированного базиса к другому. Построение канонического базиса формы как ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.
- 27. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.** Общее уравнение алгебраической кривой второго порядка (на плоскости). Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с помощью поворота и параллельного переноса. Классификация кривых второго порядка.