Тема 1. Комплексные числа и многочлены

1. Вычислить $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{20}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
2. Вычислить $\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{16}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
3. Вычислить $\left(\dfrac{-3-3i}{-2\sqrt{3}+2i}\right)^{100}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
4. Вычислить $\left(\dfrac{2-2i}{-i}\right)^{70}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
5. Вычислить $\sqrt[4]{-1}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
6. Вычислить $\sqrt[3]{-27i}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
7. Решить уравнение $z^3+1-i=0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
8. Решить уравнение $z^4+16=0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
9. Решить уравнение $z^2-(1+i)z+2(1+i)=0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
10. Решить уравнение $z^6+(2-2i)z^3-2i=0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.
11. Найти $|z|$, если $z^3=(2-i)^{12}$.
12. Найти комплексные числа, сопряженные своим квадратам.
13. Найти комплексные числа, сопряженные своим кубам.
14. Выяснить, при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.
15. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен разности модулей слагаемых?
16. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен сумме модулей слагаемых?
17. Выразить через $\cos x$ и $\sin x$: $\cos 3x,\ \sin 3x,\ \cos 4x,\ \sin 4x.$
18. Разложить многочлен $p(z)=z^3+8$ на линейные множители.
19. Разложить многочлен $p(z)=z^4+1$ на линейные множители.
20. Найти все корни многочлена $p(z)=z^4+4z^3+11z^2+14z+10$, если известен корень $z=-1+i$. Разложить многочлен на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.
21. Разложить многочлен $p(z)=z^5+z^4+z^3-z^2-z-1$ на линейные множители.
22. Определить кратность корня $z=1$ в многочлене $p(z)=2z^6-6z^5+11z^4-15z^3+9z^2+z-2$.

Тема 2. Линейные пространства

2.1. Пространство геометрических векторов V_3

1. Доказать, что множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $(\bar{x},\bar{a})=0$, где $\bar{a}=(1,-2,0)$, является линейным подпространством в пространстве V_3. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
2. Доказать, что множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $[\bar{a},\bar{x}]=\bar{0}$, где $\bar{a}=(2,1,-4)$, является линейным подпространством в пространстве V_3. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
3. Для каждого из следующих множеств геометрических векторов определить, будет ли это множество линейным подпространством пространства V_3:
   1) радиус-векторы точек данной плоскости;
   2) векторы, образующие с данным ненулевым вектором $\bar{a}$ угол α;
   3) множество векторов, удовлетворяющих условию $|\bar{x}|=1$.
4. Перечислить все линейные подпространства трехмерного векторного пространства.
5. В пространстве V_3 задана система векторов $\bar{a}=(1,2,3),\ \bar{b}=(3,4,2)$, $\bar{c}=(-1,0,4)$. Найти размерность и базис линейной оболочки этой системы векторов. Записать общий вид векторов, принадлежащих линейной оболочке. Дополнить базис линейной оболочки до базиса пространства V_3.
6. В пространстве V_3 заданы векторы $\bar{a}=\bar{i},\ \bar{b}=-\bar{i}+\bar{j},\ \bar{c}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$. Показать, что система $S=\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\}$ образует базис в пространстве V_3. Найти матрицу перехода от этого базиса к каноническому базису и координаты вектора

$\overline{x} = 4\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ в базисе S.

2.2. Пространство арифметических векторов R^n

7. Доказать, что векторы вида $(b,\ -a,\ a+3b)$ образуют линейное подпространство в пространстве R^3. Найти его базис, размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
8. Доказать, что векторы вида $(a+b, 2c-a, 3b, c)$ образуют линейное подпространство в пространстве R^4. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
9. Доказать, что векторы вида $(a-b, -3b, 0, a+b)$ образуют линейное подпространство в пространстве R^4. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
10. Образуют ли векторы $x_1 = (1,2,-1,-2), x_2 = (2,3,0,-1), x_3 = (1,2,1,4),\ x_4 = (1,3,-1,0)$ базис в пространстве арифметических векторов R^4?
11. Установить, являются ли заданные множества подпространствами пространства R^n. В случае положительного ответа найти базис и размерность подпространства.
    1) Множество всех векторов, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.
    2) Множество всех векторов, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.
    3) Множество векторов $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, у которых все компоненты x_i - целые числа.
12. В пространстве R^4 задана система векторов $\overline{a} = (1,0,0,-1),\ \overline{b} = (2,1,1,0),\ \overline{c} = (1,1,1,1),\ \overline{d} = (1,2,3,4),$ $\overline{e} = (0,1,2,3)$. Найти размерность и базис линейной оболочки этой системы векторов. Записать общий вид векторов, принадлежащих линейной оболочке. Дополнить базис линейной оболочки до базиса пространства R^4.

2.3. Пространство многочленов P_n

13. Доказать, что многочлены вида $p(x) = (a+b)x^2 + (a-b)x + a$ образуют линейное подпространство в пространстве P_2. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
14. Доказать, что многочлены вида $p(x) = (a+2b)x^3 + (b-c)x^2 + 3bx + a$ образуют линейное подпространство в пространстве P_3. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
15. Пусть L - множество многочленов степени не выше 2, удовлетворяющих условию $p(1) + p'(1) + p''(1) = 0$. Доказать, что L - линейное подпространство в пространстве P_2. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
16. Пусть L - множество многочленов степени не выше 2, удовлетворяющих условию $p(0) + p(1) + p(2) = 0$. Доказать, что L - линейное подпространство в пространстве P_2. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
17. В пространстве P_2 задана система многочленов $p_1(x) = 3x^2 + 2x + 1,\ p_2(x) = 2x^2 + 4x + 3,\ p_3(x) = 4x^2 - 1$. Найти размерность и базис линейной оболочки этой системы многочленов. Записать общий вид многочленов, принадлежащих линейной оболочке. Дополнить базис линейной оболочки до базиса пространства P_2.
18. Образуют ли многочлены $p_1(x) = x^3 + x^2 - 1,\ p_2(x) = x^2 - 2x,\ p_3(x) = x^3 + x,\ p_4(x) = x^2 - 3$ базис в пространстве P_3?
19. Доказать, что система многочленов $S = \{x^2 + 1,\ -x^2 + 2x,\ x^2 - x\}$ образует базис в пространстве P_2 многочленов степени не выше 2. Найти матрицу перехода от базиса S к каноническому базису и координаты многочлена $p(x) = -3x^2 + 4x - 7$ в базисе S.
20. Установить, являются ли заданные множества подпространствами пространства P_n. В случае положительного ответа найти базис и размерность подпространства.
    1) Множество многочленов степени не выше n, у которых коэффициенты при нечетных степенях равны нулю.
    2) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n таких, что $f(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \in R$.
    3) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n таких, что $f(x_0) = 1$ для некоторого $x_0 \in R$.

2.4. Пространство матриц M_{mn}

21. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} 2a & a+3b-2c \\ b & 5c \end{pmatrix}$ образуют линейное подпространство в пространстве матриц M_{22}. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
22. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a+b & 5b & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$ образуют линейное подпространство в пространстве матриц M_{23}. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
23. Найти общий вид матрицы, антиперестановочной $(AX = -XA)$ с данной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Доказать, что множество матриц X образует линейное подпространство в пространстве M_{22} матриц 2-го порядка. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
24. Образуют ли матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ базис в пространстве матриц M_{22}?
25. Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы матриц $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.
26. Установить, являются ли заданные множества подпространствами пространства M_{mn}. В случае положительного ответа найти базис и размерность подпространства.
    1) Множество всех симметрических квадратных матриц порядка n $\left(A^T = A\right)$.
    2) Множество всех кососимметрических квадратных матриц порядка n $\left(A^T = -A\right)$.
    3) Множество всех квадратных вырожденных матриц $(\det A = 0)$ порядка n.

2.5. Пространство непрерывных функций

27. Доказать, что множество функций $L = \{\alpha\ \mathrm{ch}\,t + \beta\ \mathrm{sh}\,t + \gamma\ e^t,\ \alpha, \beta, \gamma \in R\}$ образует линейное пространство. Найти его размерность и базис.
28. Доказать, что множество функций $L = \{\alpha\ e^t + \beta\ e^{-t} + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in R\}$ образует линейное пространство. Найти его размерность и базис.
29. Исследовать на линейную независимость систему функций $\{\sin t,\ \cos t,\ \sin 2t\}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
30. Исследовать на линейную независимость систему функций $\{1,\ \ln t,\ \ln 2t\}$, $t \in (0, +\infty)$.
31. Исследовать на линейную независимость систему функций $\{1,\ \cos t,\ \cos 2t\}$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Тема 3. Линейные операторы

3.1. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

1. В базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ линейный оператор A имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $\{\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2,\ \bar{e}_2 - \bar{e}_1\}$.

3.2. Операторы в пространстве V_3 геометрических векторов

2. В пространстве V_3 линейный оператор A - проекция на ось OY. Найти матрицу оператора A в базисе $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$. Найти образ вектора $\bar{x} = (2, -1, 3)$. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор?
3. В пространстве V_3 линейный оператор A - зеркальное отражение относительно плоскости YOZ. Найти матрицу оператора A в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Найти образ вектора $\bar{x} = (2, -1, 3)$. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

4. Пусть A - матрица линейного оператора из задачи 3. Найти A^n. Объяснить геометрический смысл полученного результата.
5. Линейный оператор A - проекция на ось $x+y=0$. Найти матрицу оператора A в базисе $\{\bar{i},\ \bar{j}\}$. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор?
6. Линейный оператор A - поворот на плоскости вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке. Найти матрицу оператора A в базисе $\{\bar{i},\ \bar{j}\}$ и образ вектора $\bar{x}=(2,\ 2)$. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.
7. Найти $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.
8. В пространстве V_3 линейный оператор A - поворот на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг оси Oy по часовой стрелке. Найти матрицу оператора A в базисе $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$. Найти образ вектора $\bar{x}=(-1,\ 2,\ \sqrt{3})$. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.
9. В пространстве V_3 оператор действует по правилу $A\bar{x}=(\bar{x},\bar{a})\cdot\bar{a}$, где $\bar{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$. Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор?
10. В пространстве V_3 оператор действует по правилу $A\bar{x}=[\bar{x},\bar{a}],\ \bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$. Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?
11. В пространстве V_3 оператор действует по правилу $A\bar{x}=[\bar{x},\bar{a}]+\bar{x},\ \bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}$. Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе и в базисе $S=\{\bar{i},\ \bar{i}-\bar{j},\ \bar{i}+\bar{j}-\bar{k}\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

3.3. Операторы в пространстве R^n арифметических векторов

12. В каноническом базисе пространства R^3 операторы A и B действуют по правилу $Ax=(7x_1+4x_3,\ 4x_2-9x_3,\ 3x_1+x_2)$, $Bx=(x_2-6x_3,\ 3x_2+7x_3,\ x_1+x_2-x_3)$. Показать линейность операторов A и B. Как действует в этом базисе оператор $C=AB-BA$?

13. В каноническом базисе пространства R^3 операторы A и B действуют по правилу $Ax=(2x_1-x_2+5x_3,\ x_1+4x_2-x_3,\ 3x_1-5x_2+2x_3)$, $Bx=(x_1+4x_2+3x_3,\ 2x_1+x_3,\ 3x_2-x_3)$. Показать линейность операторов A и B. Как действует в этом базисе оператор $C=BA-3A^2$?
14. В каноническом базисе пространства R^3 оператор A действует по правилу $Ax=(x_1-x_2+x_3,\ x_2-x_3,\ 2x_3)$. Является ли оператор A невырожденным? Если да, то найти явный вид обратного оператора.
15. В каноническом базисе пространства R^4 оператор A действует по правилу $Ax=(x_1+2x_2+3x_3-x_4,\ 2x_1+5x_3-x_4,\ x_1-2x_2+2x_3,\ 3x_1-2x_2+7x_3-x_4)$. Показать линейность оператора. Обратим ли оператор A? Найти ядро и образ оператора.

3.4. Операторы в пространстве M_{mn} матриц размера $(m\times n)$

16. Оператор A действует на матрицы второго порядка по правилу $AX=BX^T+B^TX$, где $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Показать, что A - линейный оператор. Составить его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор?
17. Оператор A действует на матрицы второго порядка по правилу $AX=BX^T-3X$, где $B=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Показать, что A - линейный оператор. Составить его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор?

3.5. Операторы в пространстве P_n многочленов степени не выше n

18. В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 оператор A действует по правилу $Ap(t) = tp'(t) - 2p(t)$. Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе. Найти образ многочлена $p(t) = t^2 - 2t + 3$. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?
19. В пространстве P_3 многочленов степени не выше 3 оператор A действует по правилу $Ap(t) = \left(t^2 p'(t)\right)'$. Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?
20. В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 оператор A действует по правилу $Ap(t) = t(p(t-1) - p(t))$. Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе и в базисе $S = \{t^2 + 1, -t^2 + 2t, t^2 - t\}$.

3.6. Операторы в пространстве непрерывных функций

21. Показать, что оператор A, действующий на функции $f(t)$ по правилу $Af(t) = f(t) + f(-t)$, является линейным оператором в пространстве функций $L = \{\alpha\, e^t + \beta\, e^{-t} + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in R\}$. Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Обратим ли оператор? Найти ядро и образ оператора.
22. Показать, что оператор дифференцирования является линейным оператором в пространстве функций $L = \{\alpha\, cht + \beta\, e^t + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in R\}$. Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Существует ли обратный оператор? Найти ядро и образ оператора.
23. Показать что оператор сдвига $T_h f(t) = f(t+h), h \in R$ является линейным оператором в пространстве функций $L = \{\alpha\, e^t + \beta\, e^{2t} + \gamma\, e^{3t},\ \alpha, \beta, \gamma \in R\}$. Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Существует ли обратный оператор? Найти ядро и образ оператора.

3.7. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

24. Линейный оператор A в пространстве V_3 имеет в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A, показать, что это оператор простого типа.
25. В пространстве V_3 линейный оператор A - зеркальное отражение относительно плоскости YOZ. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A.
26. В пространстве V_3 линейный оператор A - проекция на ось OY. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A.
27. Линейный оператор A - проекция на ось $x + y = 0$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A.
28. В пространстве V_3 оператор действует по правилу $A\bar{x} = (\bar{x}, \bar{a}) \cdot \bar{a}$, где $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A.
29. В каноническом базисе пространства R^3 оператор A действует по правилу $Ax = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_2 - x_3,\ 2x_3)$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A.
30. Найти $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.
31. Линейный оператор A в каноническом базисе пространства P_2 многочленов степени не выше 2 имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A. Является ли оператор A оператором простого типа?
32. В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 оператор A действует по правилу $Ap(t) = (t+2)p''(t)$. Найти его матрицу в каноническом базисе, собственные значения и собственные векторы. Является ли оператор оператором простого типа?
33. Оператор A действует на матрицы второго порядка по правилу $AX = B^T XB$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Показать, что A -

линейный оператор на подпространстве симметрических матриц второго порядка, найти его собственные значения и собственные векторы.

34. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A из задачи 22.
35. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A из задачи 23.
36. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A из задачи 24.

37*. Пусть $\overline{x}, \overline{y}$ - собственные векторы линейного оператора A, отвечающие различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\overline{x}+\overline{y}$ не является собственным вектором этого оператора.

38*. Как связаны между собой собственные значения и собственные векторы операторов A и A^{-1}?

39*. Как связаны между собой собственные значения и собственные векторы операторов A и A^2?

Тема 4. Квадратичные формы

1. Привести квадратичную форму $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы.
2. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $\varphi(\overline{x}) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$.
3. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму
$$\varphi(\overline{x}) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3.$$
4. Найти все значения параметра λ, при которых квадратичная форма
$$\varphi(\overline{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$
положительно определена.
5. Значение квадратичной формы на векторе $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$ равно $\varphi(\overline{x}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2^2$. Как выражается $\varphi(\overline{x})$ через координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\left\{\overline{e}_1 + \overline{e}_2,\ \overline{e}_1 - \frac{1}{2}\overline{e}_2\right\}$?
6. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$ к каноническому виду. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы.
7. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму
$$\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$
к каноническому виду. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы.
8. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип, найти каноническую систему координат и сделать чертеж: $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

Тема 5. Евклидовы пространства

5.1. Скалярное произведение

1. Базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ является ортонормированным. Составить матрицу Грама в базисе $\{\overline{e}_1 - \overline{e}_2, \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2\}$.
2. Матрица Грама в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.
   1) Найти длины базисных векторов и угол между ними.
   2) Найти длины векторов $\overline{x} = (1, -1),\ \overline{y} = (2, 1)$ и угол между ними.
3. Найти длины векторов $\overline{x} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 2\overline{e}_3,\ \overline{y} = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_3$ и угол между ними, если матрица Грама в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Ортогонализовать базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, матрица Грама в котором имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5*. В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 введено скалярное произведение по формуле $(p,q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Найти длины векторов $p(t) = 1 - t + t^2,\ q(t) = t$ и угол между ними. Найти матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

6*. Скалярное произведение в пространстве P_3 многочленов степени не выше 3 задано формулой

$(p,q)=\int_0^1 t^2 p(t)q(t)dt$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Проверить, что для векторов $p(t)=1-t^2,\ q(t)=t$ выполнено неравенство Коши-Буняковского. Найти матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.2. Ортогональные операторы

1. Ортогональный оператор, действующий в пространстве геометрических векторов V_3, переводит базисные орты $\bar{i}$ и $\bar{j}$ в векторы $\bar{e}_1=\frac{4}{5}\bar{i}-\frac{3}{5}\bar{k}$ и $\bar{e}_2=\frac{3}{13}\bar{i}+\frac{12}{13}\bar{j}+\frac{4}{13}\bar{k}$. Чему равен образ орта $\bar{k}$?
2. Оператор переводит векторы ортонормированного базиса $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2\}$ в векторы $\bar{f}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{e}_1-\bar{e}_2),\ \bar{f}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{e}_1+2\bar{e}_2)$. Является ли он ортогональным?
3. Является ли ортогональным оператор, имеющий в некотором ортонормированном базисе матрицу $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$?