ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ». (2 СЕМЕСТР)

1. Комплексные числа и многочлены.

1.1. Вычислить $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{20}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.2. Вычислить $\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{16}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.3. Вычислить $\left(\dfrac{-3-3i}{-2\sqrt{3}+2i}\right)^{100}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.4. Вычислить $\left(\dfrac{-2-2i}{-i}\right)^{10}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.5. Вычислить $\sqrt[4]{-1}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.6. Вычислить $\sqrt[3]{-27i}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.7. Решить уравнение $z^3+1-i=0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.8. Решить уравнение $z^4+16=0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.9. Решить уравнение $z^2-(1+i)z+2(1+i)=0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.10. Решить уравнение $z^6+(2-2i)z^3-2i=0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

1.11. Найти $|z|$, если $z^3=(2-i)^{12}$.

1.12. Разложить многочлен $p(z)=z^3+8$ на линейные множители.

1.13. Разложить многочлен $p(z)=z^4+1$ на линейные множители.

1.14. Найти все корни многочлена $p(z)=z^4+4z^3+11z^2+14z+10$, если известен корень $z=-1+i$. Разложить многочлен на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

1.15. Разложить многочлен $p(z)=z^5+z^4+z^3-z^2-z-1$ на линейные множители.

1.16. Определить кратность корня $z=1$ в многочлене
$p(z)=2z^6-6z^5+11z^4-15z^3+9z^2+z-2$.

2. Линейные пространства.

2.1. Доказать, что множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $(\vec{x},\vec{a})=0$, где $\vec{a}=(1,-2,0)$, является линейным подпространством в пространстве $\mathbb{V}_3$. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.2. Доказать, что множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $[\vec{a},\vec{x}]=\vec{0}$, где $\vec{a}=(2,1,-4)$, является линейным подпространством в пространстве $\mathbb{V}_3$. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.3. Для каждого из следующих множеств геометрических векторов определить, будет ли это множество линейным подпространством пространства $\mathbb{V}_3$:
1) радиус-векторы точек данной плоскости;
2) векторы, образующие с данным ненулевым вектором $\vec{a}$ угол α;
3) множество векторов, удовлетворяющих условию $|\vec{x}|=1$.

2.4. В пространстве $\mathbb{V}_3$ задана система векторов $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(3,4,2)$, $\vec{c}=(-1,0,4)$. Найти размерность и базис линейной оболочки этой системы векторов. Записать общий вид векторов, принадлежащих линейной оболочке. Дополнить базис линейной оболочки до базиса пространства $\mathbb{V}_3$.

2.5. В пространстве $\mathbb{V}_3$ заданы векторы $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Показать, что система $S = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ образует базис в пространстве $\mathbb{V}_3$. Найти матрицу перехода от этого базиса к каноническому базису и координаты вектора $\vec{x} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ в базисе S.

2.6. Доказать, что векторы вида $(b, -a, a + 3b)$ образуют линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найти его базис, размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.7. Доказать, что векторы вида $(a+b, 2c-a, 3b, c)$ образуют линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^4$. Найти его базис, размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.8. Доказать, что векторы вида $(a-b, -3b, 0, a+b)$ образуют линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^4$. Найти его базис, размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.9. Образуют ли векторы $x_1 = (1, 2, -1, -2)$, $x_2 = (2, 3, 0, -1)$, $x_3 = (1, 2, 1, 4)$, $x_4 = (1, 3, -1, 0)$ базис в пространстве арифметических векторов $\mathbb{R}^4$?

2.10. Установить, являются ли заданные множества подпространствами пространства $\mathbb{R}^n$. В случае положительного ответа найти базис и размерность подпространства. 1) Множество всех векторов, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. 2) Множество всех векторов, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. 3) Множество векторов $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, у которых все компоненты x_i — целые числа.

2.11. В пространстве $\mathbb{R}^4$ задана система векторов $\vec{a} = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{b} = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{c} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{d} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{e} = (0, 1, 2, 3)$. Найти размерность и базис линейной оболочки этой системы векторов. Записать общий вид векторов, принадлежащих линейной оболочке. Дополнить базис линейной оболочки до базиса пространства $\mathbb{R}^4$.

2.12. Доказать, что многочлены вида $p(x) = (a + b)x^2 + (a - b)x + a$ образуют линейное подпространство в пространстве $\mathbb{P}_2$. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.13. Доказать, что многочлены вида $p(x) = (a + 2b)x^3 + (b - c)x^2 + 3bx + a$ образуют линейное подпространство в пространстве $\mathbb{P}_3$. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.14. Пусть L — множество многочленов степени не выше 2, удовлетворяющих условию $p(1)+p'(1)+p''(1) = 0$. Доказать, что L — линейное подпространство в пространстве $\mathbb{P}^3$. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.15. Пусть L — множество многочленов степени не выше 2, удовлетворяющих условию $p(0)+p(1)+p(2) = 0$. Доказать, что L — линейное подпространство в пространстве $\mathbb{P}^2$. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.16. В пространстве $\mathbb{P}_2$ задана система многочленов $p_1(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = 2x^2 + 4x + 3$, $p_3(x) = 4x^2 - 1$. Найти размерность и базис линейной оболочки этой системы многочленов. Записать общий вид многочленов, принадлежащих линейной оболочке. Дополнить базис линейной оболочки до базиса пространства $\mathbb{P}_2$.

2.17. Образуют ли многочлены $p_1(x) = x^3 + x^2 - 1$, $p_2(x) = x^2 - 2x$, $p_3(x) = x^3 + x$, $p_4(x) = x^2 - 3$ базис в пространстве $\mathbb{P}_3$?

2.18. Доказать, что система многочленов $S = (x^2 + 1,\ -x^2 + 2x,\ x^2 - x)$ образует базис в пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2. Найти матрицу перехода от базиса S к каноническому базису и координаты многочлена $p(x) = -3x^2 + 4x - 7$ в базисе S.

2.19. Установить, являются ли заданные множества подпространствами пространства $\mathbb{P}_n$. В случае положительного ответа найти базис и размерность подпространства.
1) Множество многочленов степени не выше n , у которых коэффициенты при нечетных степенях равны нулю.
2) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n таких, что $f(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$.
3) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n таких, что $f(x_0) = 1$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$.

2.20. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} 2a & a+3b-2c \\ b & 5c \end{pmatrix}$ образуют линейное подпространство в пространстве матриц $\mathbb{M}_{22}$.

Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.21. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a+b & 5b & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$ образуют линейное подпространство в пространстве матриц $\mathbb{M}_{23}$.

Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.22. Найти общий вид матрицы, антиперестановочной ($AX = -XA$) с данной матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Доказать, что множество матриц X образует линейное подпространство в пространстве $\mathbb{M}_{22}$ матриц 2-го порядка.

Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

2.23. Образуют ли матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ базис в пространстве матриц $\mathbb{M}_{22}$?

2.24. Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы матриц $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.25. Установить, являются ли заданные множества подпространствами пространства $\mathbb{M}_{nn}$. В случае положительного ответа найти базис и размерность подпространства.
1) Множество всех симметрических квадратных матриц порядка n ($A^T = A$).
2) Множество всех кососимметрических квадратных матриц порядка n ($A^T = -A$).
3) Множество всех квадратных вырожденных матриц ($\det A = 0$) порядка n.

2.26. Доказать, что множество функций $L = (\alpha \operatorname{ch} t + \beta \operatorname{sh} t + \gamma e^t,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ образует линейное пространство. Найти его размерность и базис.

2.27. Доказать, что множество функций $L = (\alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ образует линейное пространство. Найти его размерность и базис.

2.28. Исследовать на линейную независимость систему функций $\sin t,\ \cos t,\ \sin 2t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.29. Исследовать на линейную независимость систему функций $\{1,\ \ln t,\ \ln 2t\}$, $t \in (0, \infty)$.

2.30. Исследовать на линейную независимость систему функций $\{1,\ \cos t,\ \cos 2t\}$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

3. Линейные операторы.

3.1. В базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ линейный оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2 - \vec{e}_1)$.

3.2. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\hat{A}$ — проекция на ось OY. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Найти образ вектора $\vec{x} = (2, -1, 3)$. Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$. Существует ли обратный оператор?

3.3. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\hat{A}$ — зеркальное отражение относительно плоскости YOZ. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Найти образ вектора $\vec{x} = (2, -1, 3)$. Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

3.4. Пусть A — матрица линейного оператора из задачи 3.3. Найти A^n. Объяснить геометрический смысл полученного результата.

3.5. Линейный оператор $\hat{A}$ — проекция на ось $x + y = 0$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$. Существует ли обратный оператор?

3.6. Линейный оператор $\hat{A}$ — поворот на плоскости вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ и образ вектора $\vec{x} = (2, 2)$. Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

3.7. Найти $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

3.8. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\hat{A}$ - поворот на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг оси OY по часовой стрелке. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Найти образ вектора $\vec{x} = (-1, 2, \sqrt{3}$. Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$. Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

3.9. В пространстве $\mathbb{V}_3$ оператор действует по правилу $\hat{A}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}) \cdot \vec{a}$, где $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$. Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

3.10. В пространстве $\mathbb{V}_3$ оператор действует по правилу $\hat{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

3.11. В пространстве $\mathbb{V}_3$ оператор действует по правилу $\hat{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$, $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Показать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе и в базисе
$S = \left(\vec{i}, \vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

3.12. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ действуют по правилу $\hat{A}(x) = (7x_1 + 4x_3,\ 4x_2 - 9x_3,\ 3x_1 + x_2)$, $\hat{B}(x) = (x_2 - 6x_3,\ 3x_2 + 7x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$. Показать линейность операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Как действует в этом базисе оператор $\hat{C} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$?

3.13. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ действуют по правилу $\hat{A}(x) = (2x_1 - x_2 + 5x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3,\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3)$,
$\hat{B}(x) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_2 - x_3)$. Показать линейность операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Как действует в этом базисе оператор $\hat{C} = \hat{B}\hat{A} - 3\hat{A}^2$?

3.14. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_2 - x_3,\ 2x_3)$. Является ли оператор $\hat{A}$ невырожденным? Если да, то найти явный вид обратного оператора.

3.15. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^4$ оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4,\ 2x_1 + 5x_3 - x_4,\ x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4)$. Показать линейность оператора. Обратим ли оператор $\hat{A}$? Найти ядро и образ оператора.

3.16. Оператор $\hat{A}$ действует на матрицы второго порядка по правилу
$\hat{A}(X) = BX^T + B^T X$, где $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$
Показать, что $\hat{A}$ — линейный оператор. Составить его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор?

3.17. Оператор $\hat{A}$ действует на матрицы второго порядка по правилу

$\hat{A}(X) = BX^T - 3X$, где $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Показать, что $\hat{A}$ - линейный оператор.

Составить его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора A. Существует ли обратный оператор?

3.18. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(p(t)) = tp'(t) - 2p(t)$. Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе. Найти образ многочлена $p(t) = t^2 - 2t + 3$. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

3.19. В пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше 3 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(p(t)) = (t^2 p'(t))'$. Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Существует ли обратный оператор?

3.20. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(p(t)) = t(p(t-1) - p(t))$. Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе и в базисе $S = (t^2 + 1,\ -t^2 + 2t,\ t^2 - t)$.

3.21. Показать, что оператор $\hat{A}$, действующий на функции $f(t)$ по правилу $\hat{A}(f(t)) = f(t) + f(-t)$, является линейным оператором в пространстве функций $L = \{\alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Обратим ли оператор? Найти ядро и образ оператора.

3.22. Показать, что оператор дифференцирования является линейным оператором в пространстве функций $L = \{\alpha \operatorname{ch} t + \beta e^t + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Существует ли обратный оператор? Найти ядро и образ оператора.

3.23. Показать что оператор сдвига $\hat{T}_h f(t) = f(t+h),\ h \in \mathbb{R}$ является линейным оператором в пространстве функций $L = \{\alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{3t},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе пространства. Существует ли обратный оператор? Найти ядро и образ оператора.

3.24. Линейный оператор $\hat{A}$ в пространстве $\mathbb{V}_3$ имеет в базисе $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, показать, что это оператор простого типа.

3.25. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\hat{A}$ — зеркальное отражение относительно плоскости YOZ . Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

3.26. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\hat{A}$ — проекция на ось OY. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

3.27. Линейный оператор $\hat{A}$ — проекция на ось $x+y=0$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

3.28. В пространстве $\mathbb{V}_3$ оператор действует по правилу $\hat{A}\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{x},\vec{a}\right)\cdot\vec{a}$, где $\vec{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

3.29. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(x)=(x_1-x_2+x_3,\ x_2-x_3, 2x_3)$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

3.30. Найти $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

3.31. Линейный оператор $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа?

3.32. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(p(t))=(t+2)p''(t)$. Найти его матрицу в каноническом базисе, собственные значения и собственные векторы. Является ли оператор оператором простого типа?

3.33. Оператор $\hat{A}$ действует на матрицы второго порядка по правилу $\hat{A}(X)=B^TB$, где

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Показать, что A - линейный оператор на подпространстве симметрических матриц второго порядка, найти его собственные значения и собственные векторы.

3.34. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора из задачи 3.22.

3.35. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора из задачи 3.23.

3.36. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора из задачи 3.24.

4. Квадратичные формы.

4.1. Привести квадратичную форму $Q(\vec{x})=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы.

4.2. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму
$Q(\vec{x}) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$.

4.3. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму
$Q(\vec{x}) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4.4. Найти все значения параметра λ, при которых квадратичная форма
$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. положительно определена.

4.5. Значение квадратичной формы на векторе $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ равно
$Q(\vec{x}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2^2$. Как выражается $Q(\vec{x})$ через координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2$?

4.6. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму
$Q(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$ к каноническому виду. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы.

4.7. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму
$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ к каноническому виду. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы.

4.8. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип, найти каноническую систему координат и сделать чертеж:
$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

5. Евклидовы пространства.

5.1. Базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ является ортонормированным. Составить матрицу Грама в базисе $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.

5.2. Матрица Грама в базисе $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Найти длины базисных векторов и угол между ними.
2) Найти длины векторов $\vec{x} = (1,\ -1)$, $\vec{y} = (2,\ 1)$ и угол между ними.

5.3. Найти длины векторов $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ и угол между ними, если матрица Грама в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2\, \vec{e}_3)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.4. Ортогонализовать базис $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, матрица Грама в котором имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.5. Ортогональный оператор, действующий в пространстве геометрических векторов V_3, переводит базисные орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в векторы $\vec{e}_1 = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{k}$ и $\vec{e}_2 = \frac{3}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j} + \frac{4}{13}\vec{k}$. Чему равен образ орта $\vec{k}$?

5.6. Оператор переводит векторы ортонормированного базиса $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ в векторы
$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$, $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$. Является ли он ортогональным?

5.7. Является ли ортогональным оператор, имеющий в некотором ортонормированном базисе матрицу $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ». (2 СЕМЕСТР)

1. Комплексные числа и многочлены.

1.1*. Найти комплексные числа, сопряженные своим квадратам.

1.2*. Найти комплексные числа, сопряженные своим кубам.

1.3*. Выяснить, при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

1.4*. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен разности модулей слагаемых?

1.5*. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен сумме модулей слагаемых?

1.6*. Используя формулу Муавра, выразить через $\cos x$ и $\sin x : \cos 3x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 4x$.

1.7*. Представить в тригонометрической форме число $-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

1.8*. Представить в тригонометрической форме число $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

1.9*. Представить в тригонометрической форме число $\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$

1.10*. Вычислить $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$

1.11*. Найти сумму всех корней n-й степени из 1.

1.12*. Решить уравнение $z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 6z - 2\sqrt{2} + 5 = 0$.

1.13*. Решить уравнение $z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 15z - 11\sqrt{2} = 0$.

1.14*. Решить уравнение $z^3 + 12z - 18i\sqrt{2} = 0$.

1.15*. Решить уравнение $z^3 + 6\sqrt{5}z^2 + 90z + 65\sqrt{5} = 0$.

2. Линейные пространства.

2.1*. Образует ли линейное пространство множество векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$, у которых все координаты x_i — целые числа, если
$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n)$ и $\alpha\mathbf{x} = ([\alpha]x_1, [\alpha]x_2, \dots [\alpha]x_n)$ ($[\alpha]$ — обозначает целую часть числа α, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее α).

2.2*. Образует ли линейное пространство множество всех сходящися последовательностей?

2.3*. Образует ли линейное пространство множество всех расходящися последовательностей?

2.4*. Образует ли линейное пространство множество $C_{[a,b]}$ всех функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$?

2.5*. Образует ли линейное пространство множество всех функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$?

2.6*. Образует ли линейное пространство множество всех преобразований поворота пространства геометрических векторов вокруг фиксированной оси?

2.7*. Образует ли линейное пространство множество всех линейных преобразований пространства геометрических векторов?

2.8*. Является ли линейным подпространством в $C_{[a,b]}$ множество всех непрерывных функций, принимающих на концах отрезка $[a,b]$ равные значения?

2.9*. Доказать, что если $\tilde{e}$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ — базисы линейного пространства L_n и T — матрицы перехода, то $T_{e\to g} = T_{e\to f} \cdot T_{f\to g}$

3. Линейные операторы.

3.1*. Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$ - собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, отвечающие различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\vec{x}+\vec{y}$ не является собственным вектором этого оператора.

3.2*. Как связаны между собой собственные значения и собственные векторы операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^{-1}$?

3.3*. Как связаны между собой собственные значения и собственные векторы операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^2$?

3.4*. Пусть A — квадратная матрица 3-го порядка, матрица B получена из A перестановкой 1-ой и 2-ой строк, а также 1-го и 2-го столбцов. Найти невырожденную матрицу P, для которой $B = P^{-1}AP$.

3.5*. Линейный оператор $\hat{A} \neq \hat{I}$ удовлетворяет условию $\hat{A}^2 = \hat{I}$. Что можно сказать о собственных значениях оператора $\hat{A}$? Привести пример такого оператора.

3.6*. Линейный оператор $\hat{A} \neq \hat{O}$ удовлетворяет условию $\hat{A}^2 = \hat{O}$. Что можно сказать о собственных значениях оператора $\hat{A}$? Привести пример такого оператора.

3.7*. Линейный оператор $\hat{A} : \mathbb{V}_2 \to \mathbb{V}_2$, $\hat{A} \neq \hat{O}$ удовлетворяет условию $\ker \hat{A} = \operatorname{im} \hat{A}$. Найти все возможные типы оператора $\hat{A}$. Для каждого типа найти $\ker \hat{A}$.

3.8*. Доказать, что: а) оператор $\hat{A}$ имеет обратный в том и только в том случае, когда он не имеет нулевых собственных значений;
б) если оператор $\hat{A}$ имеет обратный, то $\hat{A}$ и $\hat{A}^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы. Как связаны между собой собственные значения этих операторов?

4. Билинейные и квадратичные формы.

4.1*. Доказать, что $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt$ является билинейной формой, где $\mathbf{x} = x(t) \in C_{[a,b]}$, $\mathbf{y} = y(t) \in C_{[a,b]}$, $K(s,t)$ – некоторая функция двух переменных,

4.2*. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Найти ее матрицу в базисе $\tilde{e} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, где $\vec{e_1} = (1,1,1)$, $\vec{e_2} = (1,1,-1)$, $\vec{e_3} = (1,-1,-1)$

4.3*. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задана билинейная форма $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$ в базисе $\tilde{e}$. Найти ее матрицу в базисе $\tilde{f}$, если $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4.4*. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат
$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$

4.5*. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат
$2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16xz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$

4.6*. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат
$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$

5. Евклидовы пространства.

5.1*. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 введено скалярное произведение по формуле $(p,q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Найти длины векторов $p(t) = 1 - t + t^2$, $q(t) = t$ и угол между ними. Найти матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.2*. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше 3 задано формулой $(p,q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Проверить, что для векторов $p(t) = 1 - t^2$, $q(t) = t$ выполнено неравенство Коши-Буняковского. Найти матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.3*. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше 3 задано формулой $(p,q) = \int_0^1 (1+t)p(t)q(t)dt$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Найти нормы многочленов $p(t) = 1 + t$, $q(t) = t^2$ и угол между ними. Составить матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.4*. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше 3 задано формулой $(p,q) = \int_0^1 t^2 p(t)q(t)dt$. Показать евклидовость скалярного произведения (p,q). Проверить, что для многочленов $p(t) = 1 - t^2$, $q(t) = t$ выполнено неравенство Коши-Буняковского. Найти матрицу Грама в каноническом базисе и записать скалярное произведение в векторно-матричной форме.

5.5*. Доказать, что скалярное произведение в пространстве $\mathbb{P}_n$ многочленов степени не выше n может быть задано формулой $(p,q) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} p(t_k)q(t_k)$, где все t_k, $k = 1, \ldots, n+1$ различны.

5.6*. Пусть L_1 и L_2 — линейные подпространства линейного пространства $\mathbb{R}^n$, причем $\dim L_1 < \dim L_2$. Доказать, что в L_2 найдется ненулевой вектор, ортогональный ко всем векторам из L_1.

5.7*. Доказать, что в действительном евклидовом пространстве справедлива теорема Пифагора, а также ей обратная: два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2$

5.8*. Доказать теорему о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

5.9*. Доказать, что если вектор $\vec{x}$ евклидова пространства ортогонален к каждому из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$, то он ортогонален к любому вектору из их линейной оболочки $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k \rangle$. Вывести отсюда школьную теорему о трех перпендикулярах.

5.10*. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к каноническому базису, если скалярное произведение задано формулой $(p,q) = \int\limits_{-2}^{4} p(t)q(t)dt$

5.11*. Доказать, что линейный оператор $\hat{A}$, заданный в базисе $\tilde{f}$ матрицей
$$A_f = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
является самосопряженным, если $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ и базис $\tilde{e}$ — ортонормированный. Найти ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{A}$.